Eine Starthilfe für Julia-Mengen.

Patrick Scheibe

14. Oktober 2008

Da ich in letzter Zeit sehr oft über Fragen in der Art: "Ich habe jetzt hier ein Fenster, wie kann ich denn dort hinein die Darstellung einer Julia-Menge bauen?" gestolpert bin und mit Erschrecken feststellen musste, dass dabei meist tragende Teile der Theorie fehlten, entschloss ich mich dieser Tendenz entgegen zu wirken und versprechen hiermit ebenfalls, dass dies der einzige derart unverständliche und viel zu lange Satz im gesamten Dokument bleiben wird.

Anfangen möchte ich mit der rekursiven Formel, die in jeder Beschreibung über Julia-Mengen zu finden ist.

$$z_0 = S \tag{1}$$

$$z_n = z_{n-1}^2 + c \tag{2}$$

Rekursiv bedeutet, dass man zur Berechnung eines neuen Wertes den Vorherigen benötigt. Der "n-te Wert" der Folge ist demnach z_n und zu dessen Berechnung wird der vorherige Wert z_{n-1} benötigt. Das einzige was so eine rekursiv definierte Folge noch benötigt ist ein Startwert S.

Um jetzt die einzelnen $z_1, z_2, \ldots$ auszurechnen, setzt man zuerst den Startwert S, also z_0 in die Gleichung 2 ein. Dadurch erhält man z_1. Das kann man wiederum benutzen um z_2 auszurechnen. So können wir ein beliebiges z_n bestimmen, indem wir nach und nach einsetzen. Das c in der Gleichung ist eine Konstante, die wir später einfach gegeben haben.

Leider sind alle z und auch c keine normalen "reellen" Zahlen, sondern *komplexe Zahlen*. Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der Reellen Zahlen. Während reele Zahlen auf einem "Zahlenstrahl" existieren, brauchen wir für die komplexen Zahlen eine Ebene. Man kann zum Glück komplexe Zahlen durch zuhilfenahme des kartesischen Koordinatensystems relativ einfach erklären.

Stellen wir uns also vor, wir hätten ein normales Koordinatensystem und die x-Achse wäre der Zahlenstrahl der reellen Zahlen, so wie man ihn normal aus der Schule kennt. Jetzt hat einen komplexe Zahl allerdings nicht nur einen *Realteil*, sondern extra noch einen *Imaginärteil*. Dieser Imaginärteil ist sozusagen der Anteil in y-Richtung. Aufgeschrieben wird eine komplexe Zahl allerdings nicht in Vektorschreibweise, sondern einfach als Summe von Real- und Imaginärteil, wobei der Imaginärteil durch ein $\mathfrak{i}$ kenntlich gemacht wird. In der Abbildung oben kann eine Darstellung der *komplexen Ebene* sehen. Dort ist ebenfalls die Zahl $1 + 2\mathfrak{i}$ eingezeichnet, die im kartesischen Koordinatensystem dem Vektor $(1, 2)$ entspräche. Nun muss man nicht viel vom Rechnen mit komplexen Zahlen wissen, ausser dass erstens das $\mathfrak{i}$ immer am Imaginärteil haften bleibt und man mit ihm wie mit jeder anderen Variable rechnen kann, und zweitens, dass $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = -1$ gilt. Eine komplexe Zahl z kann man folglich schreiben als

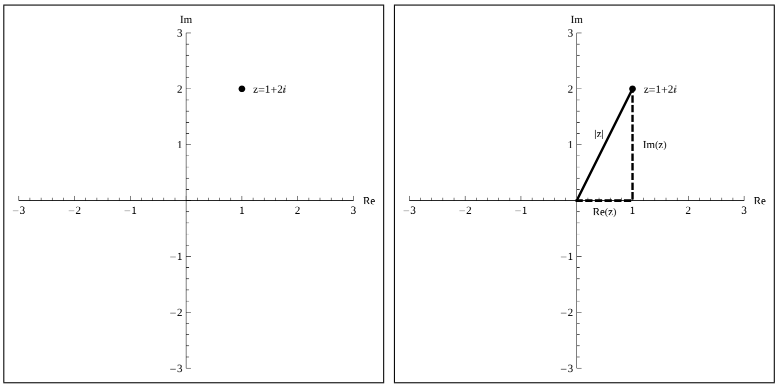

Abbildung 1: Eine komplexe Zahl in der komplexen Ebene und wie man mit dem Satz des Pythagoras den Betrag $|z|$ berechnen kann.

$$z = a + \mathrm{i}b \tag{3}$$

Will man zwei komplexe Zahlen addieren, dann ist es wie oben schon erwähnt völlig richtig, wenn man das i intuitiv als Variable auffast und deren Potenzen einfach zusammenfasst:

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d) \tag{4}$$

Bei der Multiplikation ist das ähnlich, nur dass man auf oben erwähnte Regel $\mathrm{i}^2 = -1$ achten sollte

$$(a + \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b) = a^2 + 2\mathrm{i}ab + \underbrace{\mathrm{i}^2 b^2}_{=-b^2} = (a^2 - b^2) + \mathrm{i}2ab \tag{5}$$

Nun kann man bei gegebenem z_3 und c, das gesuchte z_4 wie folgt ausrechnen: Jede einzelne der Variablen sind komplexe Zahlen und bestehen aus Real- und Imaginärteil. Das kann man einfach mal hinschreiben und erhält

$$z_4 = z_3^2 + c \tag{6}$$

$$zr_4 + \mathrm{i}zi_4 = (zr_3 + \mathrm{i}zi_3)^2 + (cr + \mathrm{i}ci) \tag{7}$$

$$zr_4 + \mathrm{i}zi_4 = zr_3^2 + 2\mathrm{i}zr_3zi_3 + \mathrm{i}^2zi_3^2 + cr + \mathrm{i}ci \tag{8}$$

$$zr_4 + \mathrm{i}zi_4 = \underbrace{zr_3^2 - zi_3^2 + cr}_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i}(\underbrace{ci + 2zr_3zi_3}_{\mathrm{Im}}) \tag{9}$$

Im letzten Schritt wurde einfach nur $\mathrm{i}^2 = -1$ benutzt und umsortiert. Danach habe ich noch das i ausgeklammert.

Warum wurde aber die Auspaltung in die beiden Teile gemacht? Das liegt daran, dass wir uns später im Computer den Real- und Im.-Teil ebenfalls getrennt als zwei `double` Zahlen merken. Es sollte also klar sein, dass wir deshalb diese beiden Teile auch getrennt berechnen können müssen. Eine Sache fehlt noch: der *Betrag* einer (komplexen) Zahl. Dieser ist in unserem Fall das Maß dafür, wie weit eine Zahl vom Nullpunkt weg ist. Bei reellen Zahlen und dem normalen Zahlenstrahl ist diese Sache relativ ersichtlich. Es ist einfach die "Strecke", wie weit die Zahl von der Null weg ist. Eine 3 ist demnach genau 3 Einheiten von der Null weg. Eine -3 ebenfalls. Deshalb ist der Betrag einer Zahl auch immer positiv, weil die Länge einer Strecke nunmal nur positiv sein kann. Geschrieben wird dies im Übrigen immer mit zwei senkrechten Strichen, also zum Beispiel:

$$|-3.4| = 3.4 \tag{10}$$

Hat man das verstanden, dann ist der Betrag einer komplexen Zahl ebenfalls sehr leicht zu verstehen und nur der nächste logische Schritt. Abbildung 1 soll zeigen, dass man ein rechtwinkliges Dreieck an eine komplexe Zahl einzeichnen kann, so dass man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras eben diesen *Betrag der komplexen Zahl* $|z|$ einfach berechnen kann. Zur Vereinfachung bezeichnen wir den Realteil einer komplexen Zahl z mit $Re(z)$ und den Imaginärteil analog mit $Im(z)$. Durch das eingezeichnete Dreieck ergibt sich somit der Betrag für z mit

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \tag{11}$$

Fassen wir also nochmal zusammen, was wir bis jetzt haben. Wir wissen, dass komplexe Zahlen einen Erweiterung zu den reelen Zahlen darstellen. Wir können sie addieren, multiplizieren (und damit auch quadrieren) und den Betrag einer komplexen Zahl errechnen. Mit diesem Wissen werden wir jetzt mal ein Beispiel durchrechnen. Wir wählen uns zuerst irgendeine komplexe Zahl als Konstante c, z.B. $c = -0.8 + 0.2\mathfrak{i}$. Und jetzt wollen wir doch mal sehen, wie sich die Funktion z_n für einen beliebigen Startpunkt, also z.B. $z_0 = 0.5 + 0.5\mathfrak{i}$, verhält. Dabei werden wir in der folgenden Tabelle nacheinander $z_1, z_2, \ldots$ berechnen und uns gleichzeitig deren Betrag anschauen. Die Zeile für $n = 1$ ergibt sich also durch die Rechnung

$$z_1 = (0.5 + 0.5\mathfrak{i})^2 + (-0.8 + 0.2\mathfrak{i}) = -0.8 + 0.7\mathfrak{i} \tag{12}$$

$$|z_1| = \sqrt{(-0.8)^2 + 0.7^2} = 1.06301 \tag{13}$$

Den Rest der Tabelle kann sich der Leser analog dazu errechnen:

n	z_n	$\lvert z\rvert$
0	$0.5 + 0.5\mathfrak{i}$	0.707107
1	$-0.8 + 0.7\mathfrak{i}$	1.06301
2	$-0.65 - 0.92\mathfrak{i}$	1.12645
3	$-1.2239 + 1.396\mathfrak{i}$	1.85654
4	$-1.25088 - 3.21713\mathfrak{i}$	3.45176

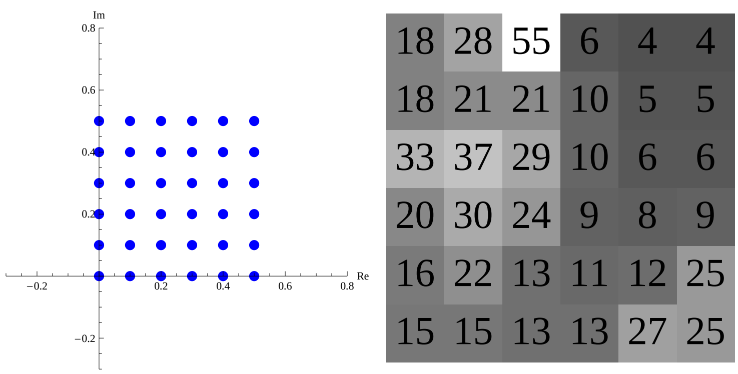

Abbildung 2: Die Anzahl der Rechenschritte für verschiedene Startwerte z_0.

Jetzt wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Entwicklung des Betrages der Zahl richten. Man sieht, dass dieser mit jeder Zeile steigt. Wir interessieren uns vorerst nur dafür, bei welchem n er grösser als 2 wird. In unserem Fall ist das bei $n = 4$. Wollen wir doch mal sehen, ob das immer so ist und nehmen wir dazu einmal verschieden Startwerte z_0. Dazu habe ich jeweils 6×6 Punkte auf der komplexen Ebene ausgewählt und obige Rechnung ausgeührt. Die Anzahl der Schritte, bis man über einen Betrag von 2 kommt sind als Zahlen im rechten Bild eingeblendet. Unser Ergebnis für $z_0 = 0.5 + 0.5\imath$, also 4, ist in der rechten, oberen Ecke zu sehen.

Weiterhin sieht man, das die Quadrate mit den Zahlen unterschiedlich hell gefärbt sind. Ein Quadrat ist umso heller, je grösser die Zahl seiner Rechenschritte (in der Informatik bezeichnet man die Anzahl an Wiederholungen des selben Rechenschritts als *Iterationen*). Jetzt wollen wir diese Bereich der Ebene in mehr als nur 6×6 Punkte unterteilen. Nehmen wir jetzt mal 50×50 und danach 200×200 Punkte und stellen auch nur die unterschiedlich hell gefärbten Quadrate dar.

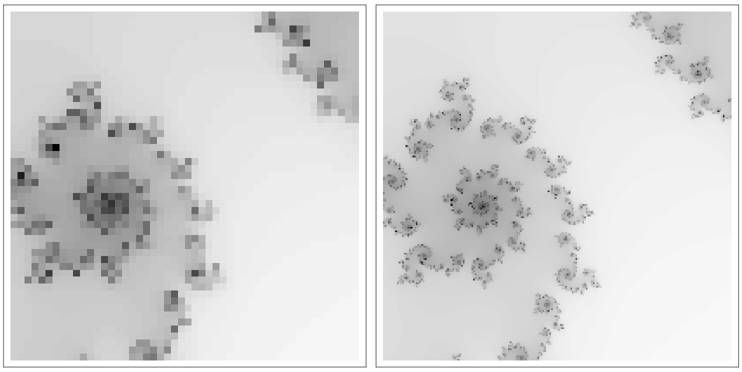

Abbildung 3: Der selbe Bereich einer Julia-Menge mit unterschiedlichen Auflösungen.

In Abbildung 3 erkennt man nun schon die Darstellung einer Julia-Menge und jetzt wissen wir auch, wie diese berechnet wird. Fassen wir also in einigen Stichpunkten zusammen, woraus unser Vorgehen alles besteht.

- Wir nehmen uns einen Teil der komplexen Ebene und unterteilen ihn in beliebig viele Punkte. Für diese Punkte berechnen wir dann die Farbwerte indem wir jeden einzelnen Punkt als Startwert S nehmen und solange die Formel 2 berechnen bis der Betrag der berechneten Zahl grösser 2 ist. Die Anzahl wie oft wir die Formel berechnen mussten gibt dann den Helligkeitswert unseres Pixels an der Stelle an.

- Die Konstante c muss geeignet gewählt werden, denn sie bestimmt wie unsere Julia-Menge später aussieht. Für unterschiedliche Werte für c entstehen somit auch die unterschiedlichsten Gebilde. Auf der Wikipedia-Seite für Julia-Mengen findet man eine Abbildung mit den Formen die man erhält für unterschiedliche Werte für c.

Damit sind alle Grundlagen zum Verständnis gelegt und einer Umsetzung in einer Programmiersprache steht nichts mehr im Weg.